

10 АНГИ

ТЭНЦЭТГЭЛ БИШ БОДОХ ИНТЕРВАЛЫН АРГА

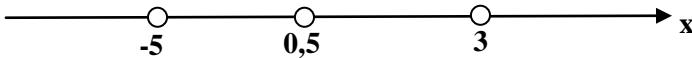
$f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ тэнцэтгэл бишүүдийг интервалын аргаар хэрхэн бодох асуудлыг авч үзье.

Интервалын аргаар тэнцэтгэл биш бодох алхмууд:

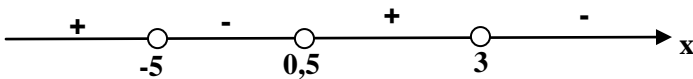
1. Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох мужийг олно.
2. $f(x) = 0$ тэгшитгэл бодож $f(x)$ илэрхийллийн язгууруудыг олно.
3. Язгууруудыг координатын шулуун дээр цэгээр дүрсэлж, $f(x)$ -ийн тодорхойлогдох мужийг интервалуудад хуваана.
4. $f(x)$ илэрхийллийн утгын тэмдгийг интервал бүр дээр тодорхойлон зурна.
5. Зургаас харж тэнцэтгэл бишийн шийдийг олонлогийн хэл дээр бичнэ.

Жишээ 1: $(2x-1)(x+5)(3-x) > 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

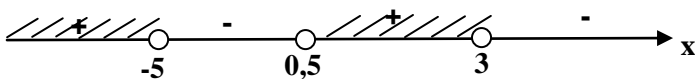
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $(2x-1)(x+5)(3-x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0$ эсвэл $x+5=0$ эсвэл $3-x=0 \Leftrightarrow x=0,5; x=-5; x=3$ гэсэн гурван язгууртай.
- Энэ гурван язгуурыг тоон шулуун дээр тэмдэглэвэл тоон шулууныг дөрвөн завсарт хуваана.



- Завсар бүрээс утга авч $f(x)$ илэрхийллийн утгын тэмдгийг интервал бүр дээр тодорхойлон зурах ёстой. Гэхдээ ингэж утга орлуулж бодолгүйгээр тэмдгийг тодорхойлох арга байдаг.
 - ✓ **Үүний тулд** $f(x)$ илэрхийллийн хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг ямар байгааг харах ба тэр тэмдгийг тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр тавина. Манай бодлого дээр хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг $(+)\cdot(+)\cdot(-) = (-)$ хасах байгаа учир тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр хасах тэмдэг тавина.
 - ✓ Дараа нь баруун талын тэмдгээс эхлээд тэмдгийг сөөлжлүүлэн бичнэ.



- Бидний тэнцэтгэл биш тэгээс их байх утгыг олох ёстой учир дээрх дөрвөн завсрын нэмэх тэмдэг авсан завсрууд нь тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

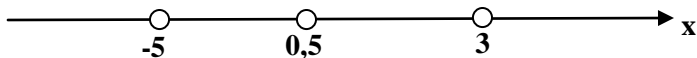


- Шийдийг олонлогийн хэл дээр бичвэл: $]-\infty; -5[\cup]0,5; 3[$

Жишээ 2: $(2x-1)(x+5)^4(3-x) \leq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

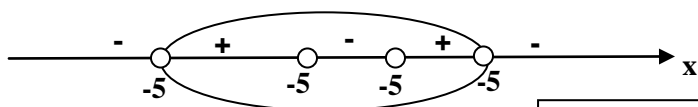
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.

- $(2x-1)(x+5)^4(3-x) = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0$ эсвэл $(x+5)^4 = 0$ эсвэл $3-x=0 \Leftrightarrow x = 0,5; x = -5; x = 3$ гэсэн гурван язгууртай.
- Энэ гурван язгуурыг тоон шулуун дээр тэмдэглэвэл тоон шулууныг дөрвөн завсарт хуваана.



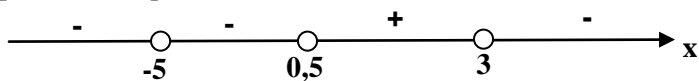
- хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг $(+) \cdot (+) \cdot (-) = (-)$ хасах байгаа учир тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр хасах тэмдэг тавина.
- Дараа нь баруун талын тэмдгээс эхлээд тэмдгийг сөөлжлүүлэн бичнэ.

- ✓ Гэтэл $(x+5)^4 = 0$ тэгшитгэлээс $x = -5$ нь дөрвөн удаа буюу тэгш удаа давтагдсан язгуур учир үүнийг тооцвол -5-ын хоёр талын завсар хоёулаа хасах тэмдэгтэй байна.

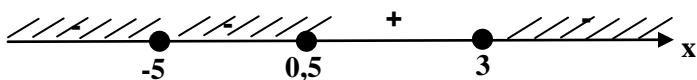


Тоон шулуун дээр тухайн тоо цор ганц байна.

ЭНДЭЭС ДҮГНЭЛТ ХИЙВЭЛ: $f(x)$ илэрхийлэл сондгой тоон удаа давтагдсан язгуурынхаа хоёр талд орших завсарт өөр өөр тэмдэгтэй (тэмдэг сөөлжилнө.) Тэгш тоон удаа давтагдсан язгуур бүрийнхээ хоёр талд ижил тэмдэгтэй байна. (тэмдэг сөөлжлөхгүй.)



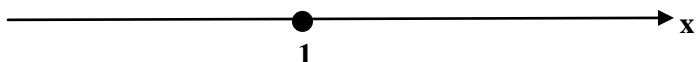
- Бидний тэнцэтгэл биш тэгээс бага буюу тэнцүү байх утгыг олох ёстой учир дээрх дөрвөн завсрын хасах тэмдэг авсан завсрууд нь тэнцэтгэл бишийн шийд болно. Тэнцүү байх шийдийг олох тул хар дугуйгаар цэгийг дүрсэлнэ.



- Шийдийг олонлогийн хэл дээр бичвэл:
 $]-\infty; -5] \cup [-5; 0,5] \cup [3; +\infty[$ болох ба хасах тав нь шийд болох учир эхний хоёр завсрыг нэгтгэж бичиж болно. $]-\infty; 0,5] \cup [3; +\infty[$

Жишээ 3: $-x^2 + 2x - 1 \leq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $-x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 1$ гэсэн тэгш удаа давхацсан язгууртай.



- хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг хасах байгаа учир тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр хасах тэмдэг тавина. Мөн $x = 1$ нь тэгш удаа давхацсан язгуур тул нэгийн хоёр

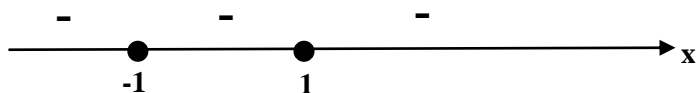
талын тэмдэг сөөлжлөхгүй. Тэгээс бага буюу тэнцүү утгыг олох тул хасах тэмдэгтэй завсрыг авна. $x = 1$ нь шийд болох учир тоон шулуун нэг цэг дээр тасрахгүй.

- Тэнцэтгэл бишийн шийд:

$$]-\infty; 1] \cup [1; +\infty[\Leftrightarrow \text{нэгтгэж бичвэл }]-\infty; +\infty[$$

Жишээ 4: $(-x^2 + 2x - 1)(x + 1)^4 \geq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $(-x^2 + 2x - 1)(x + 1)^4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ гэсэн хоёр удаа давхацсан $x = -1$ гэсэн дөрвөн удаа давхацсан язгууртай.
- хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг хасах байгаа учир тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр хасах тэмдэг тавина. $x = 1$ нь тэгш удаа давхацсан язгуур тул тэмдэг сөөлжлөхгүй. Мөн $x = -1$ нь тэгш удаа давхацсан язгуур тул тэмдэг сөөлжлөхгүй.
- Тэгээс их буюу тэнцүү утгыг олох тул нэмэх тэмдэгтэй завсрыг авах гэтэл нэмэх тэмдэгтэй завсар байхгүй бөгөөд харин $x = 1$ ба $x = -1$ утгууд нь тэгтэй тэнцэх утгууд тул тэнцэтгэл бишийн шийд болно.

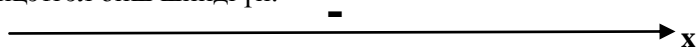


- Тэнцэтгэл бишийн шийд:

$$x = 1, x = -1 \text{ ба олонлогийн хэл дээр } \{-1; 1\}$$

Жишээ 5: $-x^2 + 2x - 9 > 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

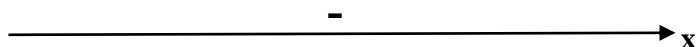
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $-x^2 + 2x - 9 = 0$ тэгшитгэл язгуургүй. Тоон шулуун тоон завсарт хуваагдахгүй.
- хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг хасах байгаа учир тоон шулуун дээр хасах тэмдэг тавина. Өөрөөр хэлбэл бүх тоон утганд энэ тэнцэтгэл биш сөрөг утга авна. Тэгээс их утгыг олох тул нэмэх тэмдэгтэй завсрыг авах гэтэл нэмэх тэмдэгтэй завсар байхгүй тул тэнцэтгэл биш шийдгүй.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: олонлогийн хэл дээр $\{\emptyset\}$

Жишээ 6: $-x^2 + 2x - 9 < 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

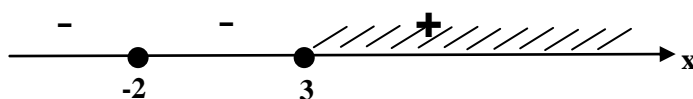
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $-x^2 + 2x - 9 = 0$ тэгшитгэл язгуургүй. Тоон шулуун тоон завсарт хуваагдахгүй.
- хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг хасах байгаа учир тоон шулуун дээр хасах тэмдэг тавина. Өөрөөр хэлбэл бүх тоон утганд энэ тэнцэтгэл биш сөрөг утга авна. Тэгээс бага утгыг олох тул сөрөг тэмдэгтэй завсрыг авах ба энэ нь бүх тоон шулуун болно.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: олонлогийн хэл дээр $\{-\infty; +\infty\}$

Жишээ 7: $(x^2 + 3x + 7)(x + 2)^4(x - 3)^3 \geq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

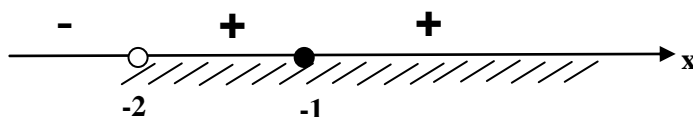
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $(x^2 + 3x + 7)(x + 2)^4(x - 3)^3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 7 = 0 \Leftrightarrow$ язгуургүй, $x = -2$ гэсэн тэгш удаа давхацсан $x = 3$ гэсэн сондгой удаа давхацсан язгууртай.
- хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг нэмэх байгаа учир тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр нэмэх тэмдэг тавина. $x = -2$ нь тэгш удаа давхацсан язгуур тул тэмдэг сөөлжлөхгүй. Мөн $x = 3$ нь сондгой удаа давхацсан язгуур тул тэмдэг сөөлжилнө.
- Тэгээс их буюу тэнцүү утгыг олох тул эерэг тэмдэгтэй завсрыг авна. Тэнцүү байх шийдийг олох тул хар дугуйгаар цэгийг дүрслэх ба $x = -2$ $x = 3$ утгууд нь тэнцэтгэл бишийн шийд болох бөгөөд сурагчид -2 -ыг шийд болгохгүй орхигдуулдаг алдаа түгээмэл байдаг тул **сайн анхааралтай** бодох шаардлагатай.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: $[3; +\infty[\cup \{-2\}$

Жишээ 8: $(x^2 + 3x + 2) \cdot \log_3(x + 2) \leq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

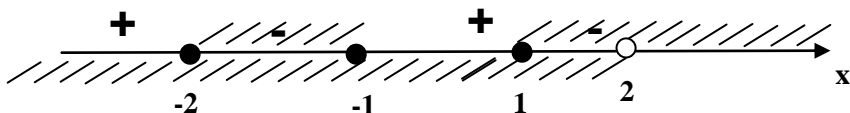
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ $]-2; +\infty[$ юм.
- $(x^2 + 3x + 2) \cdot \log_3(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$ эсвэл $\log_3(x + 2) = 0$, квадрат тэгшитгэл $x = -2$ $x = -1$ гэсэн хоёр язгууртай. Логарифм тэгшитгэл $\log_3(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 3^0 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ гэсэн язгууртай. Хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг нэмэх байгаа учир тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр нэмэх тэмдэг тавина. $x = -1$ нь тэгш удаа давхацсан язгуур тул тэмдэг сөөлжлөхгүй.
- Тэгээс бага буюу тэнцүү утгыг олох тул сөрөг тэмдэгтэй завсрыг авна. Тэнцүү байх шийдийг олох тул хар дугуйгаар цэгийг дүрслэх боловч $x = -2$ нь $f(x)$ -ийн тодорхойлогдох мужид орохгүй тул шийд болохгүй.
- Гэтэл сөрөг байх завсар нь Тодорхойлогдох мужид орохгүй тул тэнцэтгэл бишийн шийд зөвхөн -1 болно.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: $\{-1\}$

Жишээ 9: $(x^2 + 3x + 2) \cdot \log_3(2 - x) \leq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $2 - x > 0 \Leftrightarrow 2 > x$
 $]-\infty; 2[$ юм.
- $(x^2 + 3x + 2) \cdot \log_3(2 - x) = 0 \Leftrightarrow$ квадрат тэгшитгэл $x = -2$
 $x = -1$ гэсэн хоёр язгууртай. Логарифм тэгшитгэл
 $\log_3(2 - x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 3^0 \Leftrightarrow 2 - x = 1 \Leftrightarrow 1 = x$ гэсэн язгууртай.
 Хувьсагчийн их зэрэгтийн өмнөх тэмдэг хасах байгаа учир тоон шулуун дээрх хамгийн баруун талын завсар дээр хасах тэмдэг тавина.
- Тэгээс бага буюу тэнцүү утгыг олох тул сөрөг тэмдэгтэй завсрыг авна. Тэнцүү байх шийдийг олох тул хар дугуйгаар цэгийг дүрсэлнэ.
- Сөрөг байх завсрын Тодорхойлогдох мужид орох хэсгийг тэнцэтгэл бишийн шийд болгож авна. Тодорхойлогдох мужийг шулууны доод талд дүрслэв.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: $[-2; -1] \cup [1; 2[$

➤ Бутархай рациональ тэнцэтгэл бишийг бодохдоо бүхэл рациональ тэнцэтгэл бишид шилжүүлдэг.

Жишээ 10: $\frac{(x^2 + 3x + 2) \cdot (2 - x)(x^2 + 4)(x - 1)^2}{(x + 1)^2} \leq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

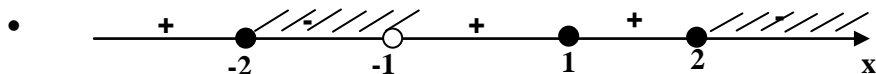
- Тодорхойлогдох муж нь $(x + 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$
- Энэ мужид $\frac{(x^2 + 3x + 2) \cdot (2 - x)(x^2 + 4)(x - 1)^2}{(x + 1)^2}$ ноогдвор ба
 $(x^2 + 3x + 2) \cdot (2 - x)(x^2 + 4) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$ үржвэр ижил тэмдэгтэй.

Иймд өгөгдсөн тэнцэтгэл биш

$$\begin{cases} (x^2 + 3x + 2) \cdot (2 - x)(x^2 + 4) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2 \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

системтэй тэнцүү чанартай.

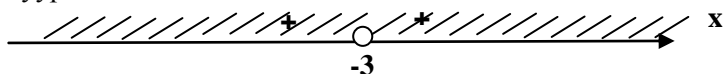
- $(x^2 + 3x + 2) \cdot (2 - x)(x^2 + 4) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$ эсвэл $2 - x = 0$
 эсвэл $x^2 + 4 = 0$ эсвэл $(x - 1)^2 = 0$ эсвэл $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $x = -1, x = -2, x = 2, x = 1, x = 1, x = -1, x = -1$
 гэсэн язгууруудтай.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: $[-2; -1[\cup [2; +\infty[\cup \{1\}$

Жишээ 11: $x^2 + 6x + 9 > 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

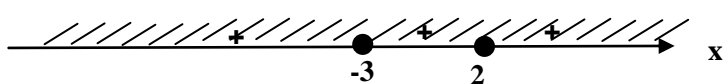
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -3$ гэсэн тэгш удаа давхацсан язгууртай.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: $]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$

Жишээ 12: $(x^2 + 6x + 9)(2 - x)^2 \geq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

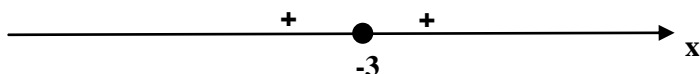
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $(x^2 + 6x + 9)(2 - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -3, x = 2, x = 2$ гэсэн тэгш удаа давхацсан язгууртай.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: $]-\infty; +\infty[$
- Тоон шулууны баруун гар талаас яагаад нэмэх тэмдэг бичсэнийг тайлбарлаарай.

Жишээ 13: $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

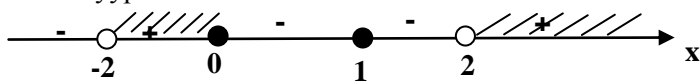
- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж нь $]-\infty; +\infty[$ юм.
- $x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = -3$ гэсэн тэгш удаа давхацсан язгууртай.



- Тэгээс бага буюу тэнцүү утгыг олох ёстой. Гэтэл тэгээс бага утга байхгүй харин тэгтэй тэнцэх -3 гэсэн ганц утга байна.
- Тэнцэтгэл бишийн шийд: олонлогийн хэл дээр $\{-3\}$

Жишээ 14: $\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 4} \geq 0$ тэнцэтгэл биш бодъё.

- Тэнцэтгэл бишийн тодорхойлогдох муж $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2, x \neq -2$
- Өгөгдсөн тэнцэтгэл биш $\begin{cases} (x^3 - 2x^2 + x)(x^2 - 4) \geq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases}$ системтэй тэнцүү чанартай.
- $(x^3 - 2x^2 + x)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = 1, x = 2, x = -2$ гэсэн язгууртай.



- Тэнцэтгэл бишийн шийд: $]-2; 0[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[\cup \{1\}$

Дасгал: №1. Дараах тэнцэтгэл бишүүдийг интервалын аргаар бодоорой.

1. $(4x-1)(x+8)(5-x) > 0$
2. $(2x-1)(x+5)^4(3-x) \leq 0$
3. $-x^2+8x-16 \leq 0$
4. $(-x^2+10x-25)(x+5)^4 \geq 0$
5. $-x^2+5x-9 > 0$
6. $-x^2+x-7 < 0$
7. $(x^2+6x+13)(x+1)^4(x-5)^3 \geq 0$
8. $(x^2+4x+3) \cdot \log_4(x+3) \leq 0$
9. $(x^2-3x+2) \cdot \log_2(6-x) \leq 0$
10. $\frac{(x^2+8x+7) \cdot (7-x)(x^2+4x)(x-3)^2}{(x+3)^2} \leq 0$
11. $x^2+4x+4 > 0$
12. $(x^2+4x+4)(1-x)^2 \geq 0$
13. $x^2+10x+25 \leq 0$
14. $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-9} \geq 0$
15. $(4x-3)(x+1)(8-x) > 0$
16. $(8x-2)(x+2)^4(4-x) \leq 0$
17. $-4x^2+4x-1 \leq 0$
18. $(-x^2+8x-16)(x+4)^4 \geq 0$
19. $-x^2+5x-11 > 0$
20. $-x^2+5x-11 < 0$
21. $(x^2+x+4)(x+1)^4(x-7)^3 \geq 0$
22. $(x^2+6x+5) \cdot \log_6(x+1) \leq 0$
23. $(x^2+6x+5) \cdot \log_5(5-x) \leq 0$
24. $\frac{(x^2+8x+7) \cdot (5-x)(x^2+9)(x-5)^2}{(x+7)^2} \leq 0$
25. $x^2+5x+6,25 > 0$
26. $(x^2+10x+25)(5-x)^2 \geq 0$
27. $x^2+12x+36 \leq 0$
28. $\frac{x^3-12x^2+36x}{x^2-6} \geq 0$
29. $(4x-2)(x+3)(1-x) > 0$
30. $\frac{3-x}{x+1} \leq 2$
31. $\frac{-x^2+2x-1}{x-2} \leq 2$

32. $(-x^2+14x-49)(x+3)^4 \geq 0$
33. $-x^2+x-5 > 0$
34. $-x^2+x-5 < 0$
35. $(x^2+x+2)(x-5)^4(x+2)^3 \geq 0$
36. $(x^2-3x-4) \cdot \log_2(x+5) \leq 0$
37. $(x^2-8x-9) \cdot \log_7(1-x) \leq 0$
38. $\frac{(x^2-11x-10) \cdot (8-x)(x^2+1)(x-5)^2}{(x+5)^2} \leq 0$
39. $x^2-14x+49 > 0$
40. $(x^2+6x+64)(8-x)^2 \geq 0$
41. $x^2-16x+64 \leq 0$
42. $\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-16} \geq 0$
43. $\frac{2x+3}{5-x} > 1$
44. $\frac{x+1}{x-1} \leq 1$
45. $-x^2+20x-100 \leq 0$
46. $(-x^2+4x-4)(x-0,5)^4 \geq 0$
47. $-x^2+5x-14 > 0$
48. $-x^2+5x-14 < 0$
49. $\frac{x^3+x^2}{x^2+4x+12} \geq 0$
50. $(x^2-2x-8) \cdot \log_5(x+2) \leq 0$